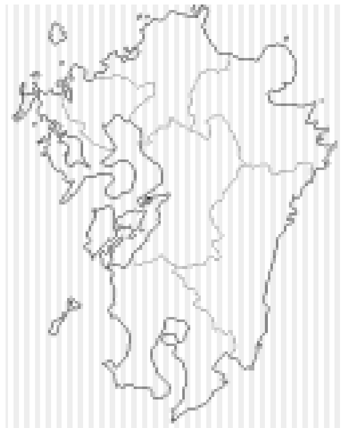
雨男と晴女の理論

秋田純一(8,12,14,17,18回参加)

ある雨男の物語

世の中には、俗に「雨男」「雨女」と呼ばれる人種がいます。友達と旅行やキャンプへ行くときには、一番仲間の中にいてほしくない人種ですよね。もちろんその逆の「晴男」「晴女」というのもいるわけで、こちらはなかなかに重宝がられるのですが、一緒に両方ともいたりすると、晴男のほうが強かったから晴れた、なんてことになります。ちなみに秋田は、どちらでもないものかと思っていたのですが、九州へ、しかも陸路で行った場合、というかなり限定された条件の下では、雨男、しかもかなり強い雨を呼ぶ人種らしいことを、最近になって自覚してきました。

秋田が始めて九州へ行ったのは大学1年の夏でしたが、そのときは九州滞在中は天気はよかったものの、行こうとしていた阿蘇地方で、行く直前に大雨があり、列車が不通となってしまいました。その次に行ったのは、それから何年か後でしたが、東京から寝台列車で行く予定でいました。ところがその日に中国地方で大雨があり、途中でがけくずれがあったとかで、列車は終点まで行けるかどうか保証できないとのことでした。実際、列車は山口県に入るあたりから先へ進まなくなり、幸いなことに動いていた新幹線に徳山で乗りかえさせられることになりました。このとき遊びに行く予定だった友人宅では、数日前に台風による強風で窓ガラスが割れたそうです。



そのまた次のときは、今度こそは東京から西鹿児島まで寝台列車で行ってやろうと思っていました。ところが、どうも九州全域、特に鹿児島地方で集中豪雨となり、下関のあたりから列車がすっきりとは進まなくなってしまいました。それでも少しずつは進んでいて、いつかは西鹿児島につけると耐えたのですが、とうとう鹿児島県の川内という駅で耐えきれずに降りて熊本へ折りかえしてしまいました。このときは前日の夕方6時に列車にのってから、延々25時間も同じ列車に乗るという初めての体験をしました。そういえば、唯一九州滞在中には雨に降られなかった最初の時は、博多から宮崎方面に行くのに乗った夜行列車が、福間という駅の近くでブレーキ系統の火災をおこし、替わりのお座敷列車に乗せられて宮崎まで行く、ということもありました。そして、台風も来てないし今度こそは大丈夫だろうと万全の体制で臨んだ今回(平成9年夏)でしたが、今度は当日の朝に沼津付近で列車事故があり、朝に東京に着く予定の乗ろうとしていた寝台列車が東京駅まで来られず、したがって出発できない、ということになってしまいました。結局その列車は名古屋始発となり、新幹線で名古屋駅まで運ばれていったのでした。

参考までに、往復のどちらかに空路を使って九州へ行ったことは4回あるのですが、そのときは大雨も列車事故もなく、何事もない九州ライフをエンジョイできています。

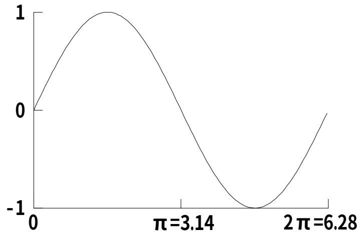
どうも秋田が陸路で九州に行くとろくなことがないようです。これを単なる偶然と呼んでよいものでしょうか。あるいは秋田は九州に嫌われている、と解釈するべきなのでしょうか。秋田はそうは考えたくありません。そこで広く「雨男」や「晴女」について、数学的な根拠を考えてみたいと思います。

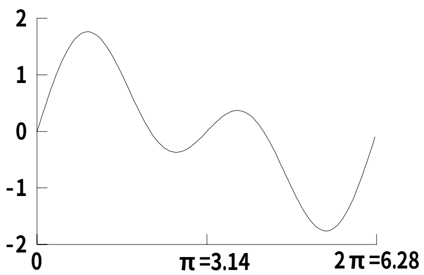
周期関数とフーリエ級数、スペクトル

ものごとには「周期」というものがあることが、非常にしばしばあります。人間生活を考えてみると、まず(一般に)朝起きて夜寝るという1日単位の生活リズムがあります。それから月曜には気をひきしめるけど、金曜ぐらいにだれてきて週末遊ぶ、という1週間単位のリズムもあるでしょう。人によっては、月初めは生活費の余裕があるけど月末にはピンチになって生活をきりつめる、という1ヶ月単位のリズムもあるでしょうし、正月には1年の計をして4月に新学期が始まり、8月に夏休みがあって大晦日にはそばを食べないと年を越せない、という1年単位のリズムもあるのではないでしょうか。

このようにいろいろなリズムがあるのは人間の生活に限ったことではなく、例えば経済活動でも 40〜60 年周期のコンドラチェフ・サイクル、10 年周期のジュグラー・サイクル、40ヶ月のキチン・サイクルなどが知られています。

ある現象が、どのような周期のリズムをもっているかを調べる方法として「フーリエ変換」と呼ばれる方法があります。いま調べたい現象を、時間 t の関数で $f(t)$ と表わしてみましょう。$f(t)$ は、具体的にはサイフの中身の金額であったり、ある人の活動指数(たとえばアドレナリンの分泌量)であったり、ある国のGNPであったりするわけです。これが、時間 t に対して、$2\pi(\cong 6.28)$ 秒の周期を持った、右の図のようなグラフだったとしましょう。この $f(t)$ は、ずばり $f(t)=\sin t$ です。では周期がその半分の $\pi(\cong 3.14)$ ならば、この場合は $f(t)=\sin 2t$ と書けるはずです。





では $f(t)$ がこの二つの周期を共にもつ、言い換えればこの二つの関数の和になっていたとすると、どのようなことになるでしょうか。要は $f(t)=\sin t+\sin 2t$ となるわけですが、その場合は左の図のようなグラフになってしまいます。まあ 2π と π の両方の周期をもっている、と見えなくもありません。また、たとえば 2π の周期をより強調したければ、$f(t)=10\sin t+\sin 2t$ のように各 sin の係数を、その重要性に応じて変えてやればよいわけです。

このように任意の周期をもつ関数をつくることは、それほど難しいことではありません。もう少し一般的には、いろいろな周期の要素を含む関数 $f(t)$ は、次のような形で書くことができることになります。

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$$

ここで $\sin mx$ だけでなく $\cos mx$ も使っているのは、$f(t)$ が奇関数でない場合も大丈夫にするためです。

では逆にある $f(t)$ があるときに、それがどのような周期をもっているのか、もう少し詳しく言えばどのような周期の「成分」をどれぐらい持つのか、言い換えれば a_m や b_m の値はいくらになるのか、ということを求めることを考えましょう。やや唐突ではありますが、次のような計算をしてみます。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots\right)\sin x dx$$

括弧のところを展開して、各項の積分を計算すればいいことになりますが、高校の数 III で習う積分(と三角関数の積和公式)を使うと、

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx = 0\ ,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx = \begin{cases}\pi & (m=n\text{のとき})\\ 0 & (m\neq n\text{のとき})\end{cases}$$

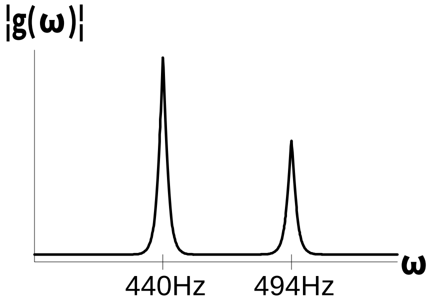
となることが求められます。つまり先程の積分は、一つを除いてすべて 0 になってしまうので、残るのは $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx = \pi b_1$ だけとなります。これを一般化すると、$f(t)$ のフーリエ級数と呼ばれる a_m や b_m は次の式で求められます。

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx\ ,\ b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx$$

ここから先は少々話をおおまかにしますが、周期が 2π や π ではなく、T や $T/2$ を周期とするように一般化し、更に非常にゆっくりとした変化の周期まで考慮 $(T\to\infty)$ すると、$f(t)$ がどのような周期の成分をもつかは、次の式で定義される、$g(\omega)$(「$f(t)$ のフーリエ変換」と呼ばれる)で特徴づけられることが導かれます。

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

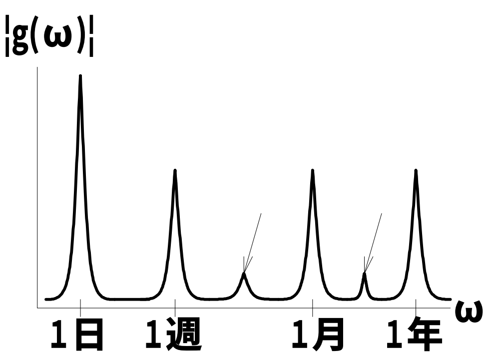
$e^{-i\omega t}$ なんていうのは、$\sin mx$ と $\cos mx$ をまとめて扱う書き方のようなものなのであまり気にしないことにしますが、この $g(\omega)$ のグラフ(正しくは $|g(\omega)|$ のグラフ)を描けば、各周期の成分について、その係数(重み)が求められるわけです。



例えば $f(t)$ が音の振幅を表わすとして、その音が強い「ラ」の音(振動数 440Hz)と、弱い「ド」の音(振動数 494Hz)の和音だとすると、この $f(t)$ に対応する $|g(\omega)|$ は、おおよそ右の図のように 440Hz と 494Hz のところに山をもつグラフになるはずです。

このように、$f(t)$ がどのような周期の成分をもつかを知りたければ $f(t)$ をフーリエ変換して $g(\omega)$ を求め、そのグラフの山のあるところから判断すればよいことになります。この $|g(\omega)|$ は、$f(t)$ のスペクトル(正しくはパワースペクトル)と呼ばれます。

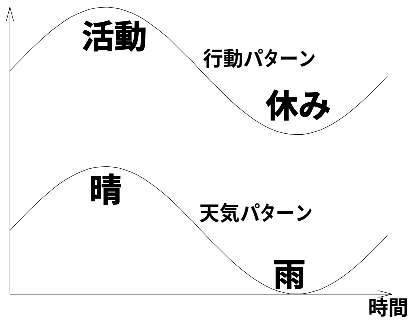
雨男と晴女のための理論

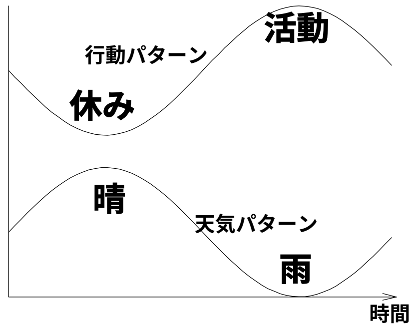


このように、フーリエ変換によって $f(t)$ がどのような周期をもつかを求められることがわかりました。では $f(t)$ を「ある人の行動」とした場合、そのフーリエ変換 $|g(\omega)|$ のグラフは、およそ左の図のようになると考えられます。1日、1週 1ヶ月単位の行動パターンが主になると考えられるので、それらの周期に対

応するところに山がみられます。それ以外にも、1週間と1ヶ月の中間や、1ヶ月と1年の中間にも、小さい山が見られます。この人の行動パターンには、多少ながら2週間周期のパターン（1週おきに銭湯に行ったりとか）や、半年ぐらい周期のパターン（春と秋には鬱状態になるとか）がある、ということでしょう。

さて、では本題に関係のありそうな天気の変化を $f(t)$ とした場合も、同様にこれをフーリエ変換して $|g(\omega)|$ を求めると、やはりどのような周期の成分をもつかが求められるでしょう。例えば夏場にはよく「週末台風」とか言われるように、ほぼ1週間周期で台風が来たりすることが多いので、この場合は $|g(\omega)|$ の周期1週間のところに大きな山が見られることになるでしょう。





世の中にはいろいろな人がいますから、中には、その人の行動パターンのうちの主な周期の成分 T_1 と、天気の変化パターンのうちの主な周期の成分 T_1 とが一致してしまう、という境遇の人もいないことはないでしょう。そのような人の場合は、運（日頃の行い？）によって右の図のどちらかになってしまうことが考えられます。上の方は日頃の行いのいい人で、出かけるときにはいつも晴がめぐってくる人、下の方は日頃の行いの悪い人で、出かけるときにはいつも雨がめぐってくる人、ということになります。

もう少し定量的に表現すると、先程の $f(t)$ のフーリエ級数の各項は、三角関数の合成によって次のようにまとめることができます。

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}\,\sin(mx + \theta_m)$$

この θ_m のことを「位相」と呼びますが、行動パターンの位相と天気パターンの位相の差がなければ、「日頃の行いのいい人」、位相の差がちょうど π だけずれていれば、「日頃の行いの悪い人」ということになるわけです。

というわけで、冒頭に出てきた「ある雨男」の場合は、ちょうど彼の行動パターンの中のピークの周期成分と、九州地方の天気のパターン（あるいはJRで列車事故が起こるパターン）の中のピークの周期成分が一致してしまい、しかもその位相の差が π であった、ということが結論づけられそうです。彼が九州に嫌われていたから位相が π ずれたのか、位相が π ずれているから嫌われている、ということになるのかはわかりませんが。

世の中の雨男雨女、あるいは晴男晴女のみなさん、しょせんは行動パターンのスペクトルの位相の違いだけです。あまり気にしないで生きていきませう。

（あきたじゅんいち：東京大学工学部電子工学科）